TEORÍA DE LA MEDIDA

Complemento de la Sesión 03

Teorema de Heine Borel

En el año 1895, Émile Borel encontró una propiedad de los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$, la cual generó un concepto muy importante en el Análisis Matemático, el de conjunto compacto.

Borel estaba atacando un problema de continuación analítica de una función de variable compleja y, como parte de su razonamiento, demostró un resultado, el cual, simplificado para el caso de un intervalo $[a, b]$ de números reales, se puede enunciar como sigue:

Si $I_1, I_2, \ldots$ es una familia infinita numerable de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes es menor que la longitud del intervalo $[a, b]$, entonces la unión de todos los intervalos I_n no cubre al intervalo $[a, b]$.

Para probar lo anterior, Borel demostró que si la unión de los intervalos I_n cubriera al intervalo $[a, b]$, entonces existiría un subcolección finita $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$, de esos intervalos, cuya unión cubriría a $[a, b]$ y entonces se tendría:

$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq \sum_{k=1}^{m} l\left(I_{n_k}\right) \geq b - a.$

Años más tarde, se encontraría un resultado más general, al cual ahora se le conoce como teorema de Heine-Borel. Su demostración se encuentra un poco más adelante.

Definición 1. *Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ está acotado si existe una bola abierta tal que A está contenido en ella.*

Definición 2. *Llamaremos celda de $\mathbb{R}^n$ a un conjunto de la forma $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2], \cdots, I_n = [a_n, b_n]$ son intervalos cerrados y acotados de números reales tales que, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_j < b_j$.*

Definición 3. *Si $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de celdas de $\mathbb{R}^n$, diremos que éstas están anidadas si $C_{k+1} \subset C_k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.*

Proposición 1. *Sea $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de celdas anidadas de $\mathbb{R}^n$, entonces $\cap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset$.*

Demostración

Sea $I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$ la celda C_m; entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, los intervalos $I_j^{(1)}$, $I_j^{(2)}$, $I_j^{(3)}$, $\ldots$ forman una sucesión anidada de intervalos cerrados y acotados; por lo tanto, existe un número real x_j en la intersección de todos ellos. Evidentemente, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, el vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenece a la celda C_m.

■

Teorema 1. *Si K es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, cerrado y acotado, entonces, para cualquier familia infinita $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, existe un subconjunto U de Γ, finito, tal que $K \subset \bigcup_{u \in U} G_u$.*

Demostración

Sea $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ y denotemos por $\mathbb{U}$ a la familia de todos los subconjuntos finitos Γ.

Supongamos que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{u \in U} G_u$.

Como K es acotado, existe una celda $I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)}$ que lo contiene, a la cual llamaremos C_1. Podemos tomarla de tal forma que los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tengan la misma longitud, la cual denotaremos por L.

Vamos a construir, inductivamente, una sucesión $(C_m)_{m \in \{2,3,\ldots\}}$ de celdas tales que, para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$:

i) $C_m \subset C_{m-1}$.

ii) $K \cap C_m \neq \emptyset$ y no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_m \subset \bigcup_{u \in U} G_u$.

iii) Si $C_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$, entonces, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $l\left(I_j^{(m)}\right) = \frac{1}{2^{(m-2)}} L$.

Definiendo $C_2 = C_1$, C_2 cumple con las condiciones i ii y iii.

Tomemos ahora $k \in \{2, 3, \ldots\}$ y supongamos que tenemos definida una celda $C_k = \left[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}\right] \times \left[a_2^{(k)}, b_2^{(k)}\right] \times \cdots \times \left[a_n^{(k)}, b_n^{(k)}\right]$ satisfaciendo las propiedades i ii y iii.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotemos por $c_j^{(k)}$ al punto medio del intervalo $\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. De esta forma, en cada coordenada j tenemos los intervalos $\left[a_j^{(k)}, c_j^{(k)}\right]$ y $\left[c_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. Tomando en cada coordenada uno de esos dos intervalos y considerando el producto cartesiano de ellos, formamos una celda. El total de celdas que podemos formar de esa manera es igual a 2^n y si $C = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ es cualquiera de esas celdas, se tiene $C \subset C_k$ y, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$l\left(I_j\right) = \frac{1}{2} l\left(\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{(k-2)}} L = \frac{1}{2^{(k-1)}} L.$

Sabemos que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_k \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, así que, por lo menos para una de las 2^n celdas que formamos, llamémosla C, se tiene que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, porque si para cualquiera de las 2^n celdas se tuviera la propiedad contraria, existiría un conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_k \subset \bigcup_{u \in U} G_u$. Para esa celda C se tiene $K \cap C \neq \emptyset$ ya que de otra forma se tendría $K \cap C \subset G_\gamma$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, lo cual contradice la propiedad con la que elegimos a C.

Definamos entonces C_{k+1} como una cualquiera de esas celdas C, entre las 2^n celdas que formamos, con la propiedad de que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C \subset \bigcup_{u \in U} G_u$.

La celda C_{k+1} así definida satisface entonces las propiedades i, ii y iii.

Así que, por el principio de inducción matemática, para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, queda definida cada una de las celdas C_m satisfaciendo las propiedades i, ii y iii.

Denotemos por $L^{(m)}$ a la longitud común, igual a $\frac{1}{2^{(m-2)}} L$, de cada uno de los intervalos $I_j^{(m)}$ que componen la celda C_m.

Por la propiedad i, las celdas de la sucesión $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que hemos construido están anidadas, así que $\cap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset$. Esta intersección es un conjunto formado por un único punto, ya que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertenecen a esa intersección, entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$, x_j y y_j pertenecen al intervalo $I_j^{(m)}$ cuya longitud es igual a $L^{(m)}$; así que $|y_j - x_j| \leq L^{(m)} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L$ para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$ y, entonces, $x_j = y_j$.

Sea $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ el único punto en la intersección $\cap_{m=1}^{\infty} C_m$.

Para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, tomemos un elemento $z^{(m)} = \left(z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right) \in K \cap C_m$, entonces tanto z como $z^{(m)}$ pertenecen a la celda C_m, así que, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$\left| z_j^{(m)} - z_j \right| \leq L^{(m)}$.

Por lo tanto:

$d\left(z^{(m)}, z\right) = \sqrt{\left(z_1^{(m)} - z_1\right)^2 + \left(z_2^{(m)} - z_2\right)^2 + \cdots + \left(z_n^{(m)} - z_n\right)^2}$

$\leq L^{(m)} \sqrt{n} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L \sqrt{n}$.

Así que la sucesión $\left(z^{(m)}\right)_{m \in \{2,3,\ldots\}}$ converge a z.

Además, $z^{(m)} \in K$ para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$, así que, como K es cerrado, $z = \lim_{m \to \infty} z^{(m)} \in K$.

Por hipótesis, $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, así que, teniendo $z \in K$, existe algún conjunto G_{γ_0} tal que $z \in G_{\gamma_0}$. Siendo G_{γ_0} un conjunto abierto, existe una bola abierta, $B_r(z)$, con centro z y un radio positivo r tal que $B_r(z) \subset G_{\gamma_0}$.

Por otra parte, como z es el centro de la bola $B_r(z)$, tomando $h = \frac{r}{2\sqrt{n}}$, la celda $[z_1 - h, z_1 + h] \times [z_2 - h, z_2 + h] \times \cdots \times [z_n - h, z_n + h]$ está contenida en $B_r(z)$. En efecto, si:

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [z_1 - h, z_1 + h] \times [z_2 - h, z_2 + h] \times \cdots \times [z_n - h, z_n + h]$,

entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene $|x_j - z_j| \leq h$, así que:

$d(x, z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \leq h\sqrt{n} = \frac{r}{2}$.

Tomemos $m_0 \in \{2, 3, \ldots\}$ tal que $L^{(m_0)} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L < h$, entonces, como:

$z \in C_{m_0} = \left[a_1^{(m)}, b_1^{(m)}\right] \times \left[a_2^{(m)}, b_2^{(m)}\right] \times \cdots \times \left[a_n^{(m)}, b_n^{(m)}\right]$,

si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es cualquier elemento de C_{m_0} se tiene, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$|y_j - z_j| \leq L^{(m_0)}$.

Así que:

$d(y, z) = \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2} \leq L^{(m_0)}\sqrt{n} < h\sqrt{n} = \frac{r}{2}$.

Por lo tanto, la celda C_{m_0} está contenida en la bola $B_r(z)$, la cual a su vez está contenida en G_{γ_0}. En particular, se tiene $K \cap C_{m_0} \subset G_{\gamma_0}$.

Hemos llegado a una contradicción ya que construimos la sucesión $(C_m)_{m \in \{2,3,\ldots\}}$ de tal forma que, para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$, no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_m \subset \bigcup_{u \in U} G_u$.

Por lo tanto, la hipótesis de la que partimos, a saber, que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, es falsa.

Así que existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, lo cual prueba el resultado.

■

Teorema 2. *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que, para cualquier familia $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, existe un subconjunto U de Γ, finito, tal que $K \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración

Tomemos un elemento cualquiera $z \in \mathbb{R}^n$. La familia de bolas abiertas $\{B_m(z) : m \in \mathbb{N}\}$ forman una cubierta de K, así que existe un subconjunto finito U de números naturales tales que $K \subset \bigcup_{m\in U} B_m(z)$. Si $m_0 = \max U$, entonces $\bigcup_{m\in U} B_m(z) = B_{m_0}(z)$, así que $K \subset B_{m_0}(z)$ y, por lo tanto, está acotado.

Para demostar que K es cerrado, tomemos un elemento cualquiera $y \in K^c$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por G_m al complemento de la bola cerrada $\overline{B}_{\frac{1}{m}}(y)$, de centro y y radio $\frac{1}{m}$. Se tiene entonces:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{B}^c_{\frac{1}{m}}(y) = \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(y)\right)^c = (\{y\})^c = \mathbb{R}^n - \{y\}.$$

Así que, como $y \notin K$, entonces $K \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m$.

Como los conjuntos G_m son abiertos, existe un subconjunto finito U de números naturales tales que $K \subset \bigcup_{m\in U} G_m$. Si $m_0 = \max U$, entonces $\bigcup_{m\in U} G_m = G_{m_0}$, así que $K \subset G_{m_0}$. Por lo tanto, $B_{\frac{1}{m_0}}(y) \subset \overline{B}_{\frac{1}{m_0}}(y) = G^c_{m_0} \subset K^c$.

Así que, dado $y \in K^c$, existe una bola abierta de centro y, contenida en K^c; es decir, todos los puntos de K^c son interiores a K^c, así que K^c es cerrado y, por lo tanto, K es cerrado.

■

Combinando los teoremas 1 y 2, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3 (Teorema de Heine Borel)**.** *Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado si y sólo si, para cualquier familia infinita $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, existe un subconjunto U de Γ, finito, tal que $K \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.*

La propiedad que tienen los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$, enunciada en el teorema de Heine Borel, es llamada compacidad. Es decir decimos que un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es compacto si para cualquier familia infinita $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, existe un conjunto finito U de Γ, finito, tal que $K \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.

En el caso de cualquier espacio métrico, no siempre los conjuntos cerrados y acotados son compactos. Por ejemplo consideremos el conjunto $\mathbf{F} = \{f : [c,d] \mapsto \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$, donde c y d son dos números reales tales que $c < d$; si $f \in \mathbf{F}$, definamos $\|f\|_s = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ y si $f, g \in \mathbf{F}$, definamos $d_s(f,g) = \|g - f\|_s$. Sabemos que $(\mathbf{F}, d_s)$ es un espacio métrico completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos distintos en $[c,d]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene $\|f_n\|_s = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $d_s(f_n, f_m) = 1$ para cualquier pareja de números naturales, m y n, tales que $n \neq m$.

Evidentemente, el conjunto $K = \{f_1, f_2, \ldots\}$ es acotado.

Además, K no tiene puntos de acumulación. En efecto, ninguna de las funciones f_n puede ser punto de acumulación de K, ya que, dada cualquiera de ellas, la bola con centro en esa función y radio $\frac{1}{2}$ no contiene alguna otra función en K. Ahora, si una función f en $\mathbf{F}$, que no pertenece a K, fuera punto de acumulación de K, entonces existirían dos funciones f_{n_1} y f_{n_2} en K tales que:

$0 < d_s(f_{n_1}, f) < \frac{1}{4}$,

$0 < d_s(f_{n_2}, f) < d_s(f_{n_1}, f)$.

Por la última desigualdad, se tendría $f_{n_1} \neq f_{n_2}$, así que $d_s(f_{n_1}, f_{n_2}) = 1$.

Por otra parte, se tendría:

$d_s(f_{n_1}, f_{n_2}) \leq d_s(f_{n_1}, f) + d_s(f, f_{n_2}) < 2d_s(f_{n_1}, f) < \frac{1}{2}$,

llegando así a una contradicción.

Siendo vacío el conjunto de puntos de acumulación de K, podemos concluir que K es cerrado.

Tenemos entonces que el conjunto K es cerrado y acotado.

Ahora bien, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la bola abierta de radio $\frac{1}{4}$ y centro f_n. La unión de esas bolas contiene a K, pero la unión de cualquier colección finita de esas bolas únicamente contiene un número finito de elementos de K, a saber, los centros de ellas.

Por lo tanto, K es un conjunto cerrado y acotado que no es compacto.

Compacidad en espacios métricos

Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera.

Definición 4. *Diremos que $K \subset X$ es compacto si para cualquier familia infinita $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, existe un conjunto finito $T \subset \Gamma$ tal que $K \subset \bigcup_{\gamma \in T} G_\gamma$.*

Definición 5. *Diremos que $K \subset X$ es numerablemente compacto si para cualquier familia $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, existe un conjunto finito $T \subset \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{n \in T} G_n$.*

Definición 6. *Diremos que $K \subset X$ es secuencialmente compacto si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K existe una subsucesión que converge a algún elemento de K.*

Definición 7. *Diremos que una familia de subconjuntos de X, $\{F_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, tiene la propiedad de la intersección finita si dado cualquier subconjunto finito $T \subset \Gamma$, se tiene $\bigcap_{\gamma \in T} F_\gamma \neq \emptyset$.*

Definición 8. *Diremos que $A \subset X$ es acotado si existe una bola abierta que lo contiene.*

Definición 9. *Diremos que $A \subset X$ es totalmente acotado si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito de bolas cerradas de radio ε cuya unión cubre A.*

Se tienen los siguientes resultados:

Teorema 4. *Si K es un subconjunto de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *K es compacto.*
2. *K es numerablemente compacto.*
3. *K es secuencialmente compacto.*
4. *Cualquier familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía.*

Proposición 2. *Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces es cerrado y acotado.*

Proposición 3. *Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces es cerrado y totalmente acotado.*

Proposición 4. *Si X es completo, un conjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado.*

Si X no es completo, es posible que haya subconjuntos cerrrados y totalmente acotados que no sean compactos. Por ejemplo, tomemos $X = \mathbb{Q}$ con la distancia usual entre números reales; entonces el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ 2 < x^2 < 3\}$ es cerrado y totalmente acotado, pero no compacto.

Teorema 5. *Si X es un espacio vectorial normado, entonces X tiene dimensión finita si y sólo si todo subconjunto de X, cerrado y acotado, es compacto.*

Teorema 6. *Si X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita, entonces la bola cerrada de radio 1 y centro 0 no es un conjunto compacto.*